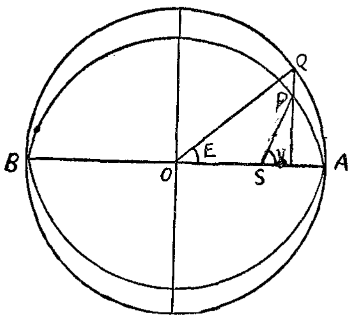
ニウトンが解いたケプラーの方程式

上田　穰

ケプラーの方程式といふのは，楕圓軌道上に運行してゐる天體例へば箒星などの位置を求めるために是非解かねばならぬ方程式である．普通

$$M=E-e\sin E$$

といふ式で示されるが，M は平均近日點角でありEは離心近日點角といふものである．而してeは軌道の離心率に外ならない．圖中の楕圓は軌道を表はしSが太陽の位置でPが箒星の本當の位置であるとする．しかしPといふ位置は直接には計算し難いのであるが，次の様な考へから間接にこれを算出することが出來る．今箒星が近日點を通過した時刻をT としそれから只今までに經過した時刻を t−T とすれば，もし箒星が一樣な速さでまわつてゐるものなら直ぐにもA點から幾らの角度動いたといふことが知れる譯でその角度を平均近日點角といふのである．箒星が太陽の周りを動く角度の平均を μ で表はすと――普通この角度を平均運動と稱してゐるのであるが――$\mu\times(t-T)=M$は平均近日點角に外ならぬものである．さてP點からABに垂線を引く時，外側の圓と交はる點をQとしてOとQとを結ぶとAOQ角が離心近日點角(E)と稱するものであり，ASP角が眞近日點角(v)と稱へられるものである．そしてこれ等の間に次の樣な關係がある．



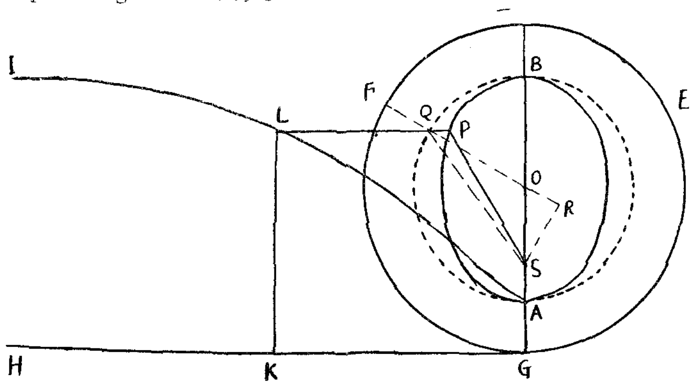
$$M=E-e\sin E$$

$$\tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \tan\frac{E}{2}$$

それで現在の時刻tがわかるとMが知れるから上のケプラーの式さへ解いてEがわかれば，直ぐに實際の位置を與へるvが計算せられるといふものである．從つてケプラーの式を說く考案は色々の人々によつて提出せられたが，その中最初に解いた人は勿論ケプラーであつてその次がわがニウトンである．そしてその方法はニウトンの名著プリンチピアに出てゐるとい

ふ譯である.

プリンチピアの最初の出版は一六八七年であつて其後も澤山の出版があるが一八七一年グラスゴー出版のものはケルビン卿とブラックバーンの出したもので，字體が鮮明であるから讀み易く又正誤及び誤植の訂正を施してあるから，今これによつてニウトンの解法を說明することしよう．尤もラテン語で書いたもので，自分は滿足に讀める譯ではないから間違の絕無は請け合ひかねるけれども，推論には間違ひない積りである．Prop. XXXI の XXIII 問題として Corporis in data trajectoria elliptica moti invenire locum ad tempus assignatum とある．



楕圓 A P B, A を頂點とし S を焦點として，今 P まで天體が來てゐるとする．O A を G まで延長して OG:OA = OA:OS と取る．垂線G Hを作り又Oを中心としO G を半徑として圓G E F を描く．G H を定規としてG E F をこの軸にそつて回轉すると圓の內部の點A はトロコイド A L I を描くのである．

さて GK の長さが全圓周 G E F G に對する比が，天體がA から出て A P を描くに要する時間と楕圓全體を廻るに要する時間との比に等しくとる．K L をこれに垂直に作るとトロコイドとL 點にて交はるがL P をK G に平行に作ると楕圓と天體の位置P にて交はる．

次にOを中心としてO A を半徑として半圓周A Q B を作ると，これは L P とQ にて交はるからS Q, O Q 線を作る．E F G 弧がO Q とF で交はるとして，O Q に垂線S R を作る．面積 A P S が面積 A Q S に對應するものであり そのA Q S は卽ち扇形 O Q A と三角形 O Q S の差であり，或は

$\frac{1}{2}$OQ×AQ と $\frac{1}{2}$OQ×SR との差であり，そして今 $\frac{1}{2}$OQ が一定であるから弧AQとSRとの差と見ることが出來るので（SR：sin$\overset{\frown}{AQ}$ の比は OS：OA の比に等しく又 OA：OG 及び AQ：GF の比に等しいから AQ−SR の GF−sin $\overset{\frown}{AQ}$ に對する比に等しい譯である）GKが弧GFと弧AQの正弦との差になる．
從つて問題は解けたのである．

大體上の樣に書いてあるが，これは少しく古めかしい書き方でもし今樣の書き方ですると次の如くなるのである．

$$\mathrm{OG}:\mathrm{OA}=\mathrm{OA}:\mathrm{OS}=\frac{1}{e}$$

$$\mathrm{GK}=2\pi\times(\text{AからPまでに要する時間})/(\text{回轉周期P})$$
$$=\mu(t\text{-}T)=M$$

μ は平均角速度で卽ち一樣の速さで廻轉してゐるとして彗星の角速度を表はすものである．

$$\text{面積 APS}=\text{面積 AQS}\times\sqrt{1-e^2}$$
$$\text{面積 AQS}=\text{扇面積 OQA}-\text{三角形OQS}$$
$$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OQ}}^2\times E-\frac{1}{2}\mathrm{OQ}\times\mathrm{SR}$$

Eは離心近日點角 AOQ を表はす．從つて $\mathrm{OQ}\times E=\overset{\frown}{AQ}$ であるが故に，上の式は $\frac{1}{2}\mathrm{OQ}\times(\overset{\frown}{AQ}-\mathrm{SR})$ となる．

さてA點からOQ線に垂線を引くと考ふれば，その長さは OA sin Eに等しく，且つSR線と平行となる譯である．
故に

$$\frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{OA}\ \sin\ E}=\frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OG}}=e$$

而して AQ, GF の圓弧は夫々

$$\overset{\frown}{AQ}=\mathrm{OA}\times E\qquad\overset{\frown}{GF}=\mathrm{OG}\times E$$

で與へられるが故に，上の式はまた $\dfrac{\overset{\frown}{AQ}}{\overset{\frown}{GF}}$ に等しい．

$$\frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{OA}\sin E}=e=\frac{\overset{\frown}{AQ}}{\overset{\frown}{GF}}=\frac{\overset{\frown}{AQ}-\mathrm{SR}}{\overset{\frown}{GF}-\mathrm{OA}\ \sin\ E}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\text{面積 ASP}=\text{面積 ASQ}\times\sqrt{1-e^2}=\frac{1}{2}\mathrm{OQ}\times(\overset{\frown}{AQ}-\mathrm{SR})\times\sqrt{1-e^2}$$

$$\overset{\frown}{GF}-\mathrm{OA}\ \sin\ E=\mathrm{OG}(E-\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OG}}\sin E)=\mathrm{OG}(E-e\ \sin\ E)$$

これを（１）式に入れると

$\overset{\frown}{AQ} - SR = e \times OG\ (E - e \sin E)$

さてケプラーの第二法則によつて，太陽から箒星に至る線（これを動徑こいふ）が箒星の動くにつれて掃いてゆく面積はその時間に比例するこいふここから次の關係式を得るここが出來る．

$$M = 2\pi \times (\text{AからPまでに要する時間})/\text{回轉周期}$$
$$= 2\pi \times (\text{面積ASP})/\text{全面積}$$

楕圓の全面積は $\pi \overline{OA}^2 \sqrt{1-e^2}$ であるから

$$M = 2\pi \times \frac{1}{2} OA \times (\overset{\frown}{AQ} - SR) \times \sqrt{1-e^2} \div \pi \overline{OA}^2 \sqrt{1-e^2}$$
$$= \frac{AQ - SR}{OA} = \frac{e \times OG(E - e \sin E)}{OA}$$

卽ち $M = E - e \sin E$ であるここが知られる．

從つて，ケプラー方程式の圖式解法こしてはトロコイド上に，GKがMに等しくなる樣にL點を求め，LからHG線に平行直線を作るこAQB圓こ交は點がQで，QがO點に於てAこなす角AOQを求むればこれがEを與へるのである．トロコイドは機械的に容易に引きうる曲線でありその他は定規こコンパスさへあれば容易にEを求めらるゝこころにこの解法の利點がある譯である．

英國に於けるニウトン祭

ニウトンを生んだ英本國では，今年ニウトンの第二百年を記念するため，さすがに大きい計畫が講ぜられてゐる．近着報によれば，ニウトンが初期に學校教育を受けたグランタム（Grantham）では，ヨーク州の數學協會が主催して下の如き集會が開かれるこいふ．

プログラム

1927年三3月19日

午前10時――グランタム市の King's School 於いて學術講演會 Dr. J. H. Jeans ジーンス博士司會

Sir J. J. Thomson タムソン教授(ケンブリヂ大學トリニテイ學院長)演題「物理學上のニウトンの效蹟」

Sir F. W. Dyson ダイソン博士（グリニチ天文臺長)演題「天文學上に於けるニウトンの效蹟」

Dr. Horace Lamb ラム博士(ケンブリヂ大學トリニテイ學院フエロー）演題「力學上に於けるニウトンの效蹟」

Prof G. H. Hardy ハーデイ教授(オクスフオド大學新學院フエロー)演題「純數學に於けるニウトンの效蹟」

午後2時――ウルストープ(Woolsthope)にあるニウトンの生家 Manor House 參觀其の後 Stoke Rochford で Christopher Turmor 氏の講演「ニウトンの田舍生活」終つて茶菓．

午後7時30分――グランタム市ジヨージ・ホテルに於いて祝賀晩餐會，ケンブリヂ大學の Sir J. J. Thomson 教授が座長さなり，オクスフオド大學天文臺長 H. H. Turner ターナー教授．エデンバラ大學の Prof. E. T. Whittaker ホイテーカー教授，バミンガム僧正，リンカーン僧正等の演說がある筈．

同　三月20日(日曜)

午前11時15分――グランタムのパリーシ教會で記念禮拜，バミンム僧正の說教あり其の後，一同，學服でギルドホール(Guild Hall)へ行列．

モーアハウス彗星の寫眞.

これは1908年十一月十六日獨乙ハイデルベルグ天文臺長 Max Wolf 教授に依つて撮影されたモーアハウス彗星の寫眞です. 彗星が物理學的に如何なる性質のものかは每號連載して居る竹田理學士の論文を參照下さい.